Wahrscheinlichkeiten

October 12, 2023

Outline

Zufallsexperimente

Die möglichen (diskreten) Ergebnisse (*outcome*) i eines Zufallsexperimentes (oder Zufallsvorgangs) bestimmen den Wert einer Zufallsvariablen $X \in \Omega_{\mathcal{X}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_I\}$ (x ist eine Funktion des Ergebnisses i). Beispiele:

- Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oder $\Omega = \{gerade, ungerade\}$
- gemessene Temperatur in K: $\Omega \in \mathbb{R}^+$
- Auswahl eines zufälligen Zeichens aus einem Buch $\Omega = \{a, b, \ldots, z, -\}$

Wahrscheinlichkeiten

Jedem (Ereignis-)Wert x_i wird eine Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ (kurz p_i) zugeordnet. Dabei gilt:

- $0 \leq p_i \leq 1$
- $P(\Omega) = \sum_{x_i \in \Omega} p_i = 1$

Wahrscheinlichkeiten einer Untermenge

Wahrscheinlichkeit einer Untermenge T von $\Omega_{\mathcal{X}}$:

$$P(T) = \sum_{i \in T} P(i)$$

Beispiel: Wahrscheinlichkeiten von Vokalen V

- $V = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$
- $P(V) = 0.06 + 0.09 + 0.06 + 0.07 + 0.03 = 0.31$

(Multivariate Verteilungen)

Der Ausgang des Zufallsexperimentes kann auch auf ein geordnetes Paar X, Y abbilden, mit

- mit
  - $X \in \Omega_X = \{x_1, \ldots, x_I\}$
  - $Y \in \Omega_Y = \{y_1, \ldots, y_J\}$.
- $P(X, Y)$ ist eine multivariate Wahrscheinlichkeit (*Joint Probability*).
- Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht notwendigerweise unabhängig.

Beispiel

Wurf eines Würfels mit $X \in \{gerade, ungerade\}$ und $y \in \{Primzahl, keinePrimzahl\}$:

- $P(gerade, primzahl) = 1/6$
- $P(ungerade, primzahl) = 2/6$
- $P(gerade, keinePrimzahl) = 2/6$
- $P(ungerade, keinePrimzahl) = 1/6$

mit den Primzahlen $2, 3$ und 5.
Die Angabe aller Wahrscheinlichkeiten der möglichen Zustände bestimmt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (*distribution*).

Marginalisierung

Die Randverteilung (*Marginal Probability*) $P(X)$ ergibt sich aus der *Joint Probability* $P(X, Y)$ durch Summation:

$$P(X = x_i) \equiv \sum_{Y \in \Omega_Y} P(X = x_i, Y).$$

Analog mit kürzerer Notation für die Randverteilung $P(Y)$:

$$P(Y) \equiv \sum_{x_i \in \Omega_X} P(x_i, Y).$$

Beispiel

für den Wurf eines Würfels mit

- $P(gerade, primzahl) = 1/6$
- $P(ungerade, primzahl) = 2/6$
- $P(gerade, keinePrimzahl) = 2/6$
- $P(ungerade, keinePrimzahl) = 1/6$

$$P(primzahl) = P(gerade, primzahl) + P(ungerade, primzahl) = 1/2$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) \equiv \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

- wenn $P(Y = y_j) \neq 0$
- falls $P(Y = y_j) = 0$ dann ist $P(X = x_i \mid Y = y_j)$ undefiniert!

Beispiel

für den Wurf eines Würfels mit

- $P(gerade, primzahl) = 1/6$
- $P(ungerade, primzahl) = 2/6$
- $P(gerade, keinePrimzahl) = 2/6$
- $P(ungerade, keinePrimzahl) = 1/6$

$$P(primzahl|gerade) = \frac{1/6}{1/6 + 2/6} = 1/3$$

Produkt- und Summenregel

Produktregel

$$P(X, Y) = P(X \mid Y)P(Y) = P(Y \mid X)P(X).$$

Summenregel (Marginalisierung)

$$P(X) = \sum_{y_i} P(X, Y = y_i) = \sum_{y_i} P(X \mid Y = y_i)P(Y = y_i)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten - Satz von Bayes

aus Produktregel ergibt sich direkt:

Satz von Bayes

$$P(Y \mid X) = \frac{P(X \mid Y)P(Y)}{P(X)} = \frac{P(X|Y)P(Y)}{\sum_{y_i} P(X \mid Y = y_i)P(Y = y_i)}$$

Statistische Unabhängigkeit

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind statistisch unabhängig (*independent*), wenn und nur wenn

$$P(X, Y) = P(X)P(Y)$$

Notation: $X \perp Y$

Wahrscheinlichkeitsdichte

Bei kontinuierlichen Variablen ist $p(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte (*probability density function, pdf*)

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

und der Wahrscheinlichkeit das x ins Intervall $[a, b]$ fällt:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} p(x) dx$$

Erwartungswert

Der Erwartungswert für eine Funktion von $f(x)$ ist:

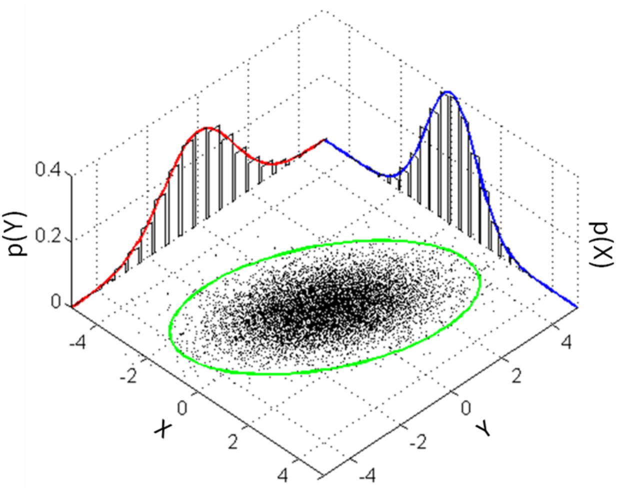
$$\mathbb{E}_{\mathcal{X}}[f(x)] = \int_{\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx = \int_{\mathcal{X}} f(x)dp(x)$$

Erwartungswert: Join Probabilty

Der Erwartungswert für eine Funktion von $f(x, y)$ ist:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}[f(x,y)] = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} f(x,y)p(x,y)dxdy = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} f(x,y)dp(x,y)$$

Beispiel: Multivariate Verteilung



Literaturangabe

- [MacKay] David McKay: Information Theory, Inference, and Learning Algorithms, Cambridge University Press, 2003